

高重合度齿轮传动系统的振动参数稳定性

李同杰^{1,2}, 靳广虎¹, 朱如鹏¹, 李发家³, 安鲁陵¹

(1. 南京航空航天大学 机电学院, 南京 210016;

2. 安徽科技学院 机械工程学院, 安徽 滁州 233100;

3. 济南大学 机械工程学院, 济南 250022)

摘 要: 研究了高重合度齿轮转子-滚动轴承传动系统的振动强度稳定性以及振动轨道稳定性随系统参数的变化规律。通过振动强度参数稳定域的计算,量化了高重合度齿轮副对齿轮转子-滚动轴承传动系统稳定性提升的贡献大小。结果发现在转子质量偏心较小的条件下,高重合度齿轮系统的振动强度稳定性要比普通重合度齿轮系统提升很多;但在转子质量偏心较大时,高重合度齿轮副的采用对传动系统参数稳定域的扩张并没有显著贡献。通过振动轨道稳定性全局分岔图的计算,明确了滚动轴承游隙、转子质量偏心等参数对高重合度齿轮转子-滚动轴承系统振动轨道稳定性的影响规律,获得了系统各种稳定周期轨道及非周期轨道与对应参数区间的映射关系。

关 键 词: 高重合度; 齿轮转子-滚动轴承系统; 非线性振动特性; 振动强度稳定性; 振动轨道稳定性

中图分类号: V233.1; O322

文献标志码: A

Vibration parameter stability of high contact ratio gear transimission system

LI Tongjie^{1,2}, JIN Guanghu¹, ZHU Rupeng¹, LI Fajia³, AN Luling¹

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. College of Mechanical Engineering,

Anhui Science and Technology University, Chuzhou Anhui 233100, China;

3. School of Mechanical Engineering, University of Jinan, Jinan 250022, China)

Abstract: The vibration intensity stability and movement orbit stability of high contact ratio gear rotor-rolling bearing transimission system was studied. By using the stability domain of vibration intensity parameter, the contribution of high contact ratio gear pair to enhance the stability of the gear rotor-rolling bearing system was quantified. The results revealed that under the condition of small mass eccentricity of the rotor, high contact ratio gear pair was able to improve the system's vibration intensity stability significantly, but high contact ratio gear pair played a limited role to improve the system's vibration intensity stability under the condition of large mass eccentricity of the rotor. The global bifurcation diagram of system's movement orbit stability with the parameters were calculated, the influence rules of

收稿日期: 2016-04-03

基金项目: 国家自然科学基金(51475226); 安徽省教育厅自然科学重点项目(KJ2015A179);

安徽科技学院自然科学项目(ZRC2016488)

作者简介: 李同杰(1980—),男,副教授,博士后,主要从事航空齿轮传动系统动力学研究。

引用格式: 李同杰,靳广虎,朱如鹏,等. 高重合度齿轮传动系统的振动参数稳定性[J]. 航空动力学报,2017,32(10):2456-2466. LI Tongjie, JIN Guanghu, ZHU Rupeng, et al. Vibration parameter stability of high contact ratio gear transimission system [J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(10): 2456-2466.

clearance of rolling bearing and mass eccentricity of rotor on system's movement orbit stability were obtained. The mapping relation of several key parameters and all kinds of stable periodic orbits and non-periodic orbits were gotten.

Key words: high contact ratio; gear rotor-rolling bearing system; nonlinear vibration; vibration intensity stability; movement orbit stability

高重合度齿轮是指重合度大于 2 的齿轮,由于在啮合过程中参与啮合的轮齿对数总能够保持在 2 对以上,所以就比普通重合度齿轮具有更优的承载能力,以及更小的啮合刚度波动,吸引了众多专家学者的研究目光^[1-3]。邓效忠等较早开展了高重合度齿轮的研究工作,并在高重合度弧齿锥齿轮的参数设计^[4]、强度分析^[5]以及性能试验^[6]等方面取得了系列重要成果。近年来朱如鹏团队在高重合度直齿轮的非线性振动分岔特性^[7-8],高重合度行星齿轮传动的动载以及均载特性^[9]方面展开了较为系统的研究。赵宁等^[10]改进了一种具有适应值预测机制的遗传算法,以之对高重合度人字齿轮传动的动态性能进行了优化设计,并通过试验验证了优化结果在减振降噪方面的有效性。WANG Jiande 等^[11]采用有限元计算了高重合度齿轮的刚度、齿间载荷分配、接触应力和齿根弯曲应力。LI Shuting^[12]分析了高重合度齿轮的传动误差和啮合刚度,并对比了高重合度齿轮和普通重合度齿轮在齿根弯曲应力和齿面接触应力方面的异同。

齿轮传动系统的稳定性包括齿轮振动强度的稳定性^[13]和振动轨道的稳定性^[14]两部分,对齿轮传动系统的振动与噪声有着深刻影响。目前国内

外关于高重合度齿轮传动的研究文献中,对参数稳定性的研究尚不多见^[7],而同时虑及滚动轴承非线性支撑力与齿轮副啮合耦合效应的稳定性研究更是鲜见报道。本文将在充分考虑滚动轴承游隙以及齿轮副齿侧间隙等非线性因素的基础上,建立高重合度直齿轮转子-滚动轴承的非线性动力学模型,通过数值仿真的手段初步研究高重合度齿轮传动系统的振动强度稳定性以及振动轨道稳定性随系统参数的变化规律。

1 动力学模型

图 1 是高重合度直齿轮转子-滚动轴承非线性系统的动力学模型,其中图 1(a)是系统的整体结构,主、从动转子两端均为滚动轴承支撑,跨中都固定一个高重合度直齿轮;图 1(b)是齿轮转子受力分析的轴向投影,并以角标 1 表示主动转子-轴承系统相关参数,角标 2 表示从动转子-轴承系统相关参数。在 Jeffcott 转子的假设下,每个转子均存在两个横向振动位移(x, y)和一个扭转振动位移 θ ,这样整个动力学模型就存在 6 个自由度,即($x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2$)。 F_x 及 F_y 分别为轴承作用在转子上的径向力的两个分量, F 为齿轮副啮合力, m 为齿轮模数, α 为齿轮压力角, Z 为

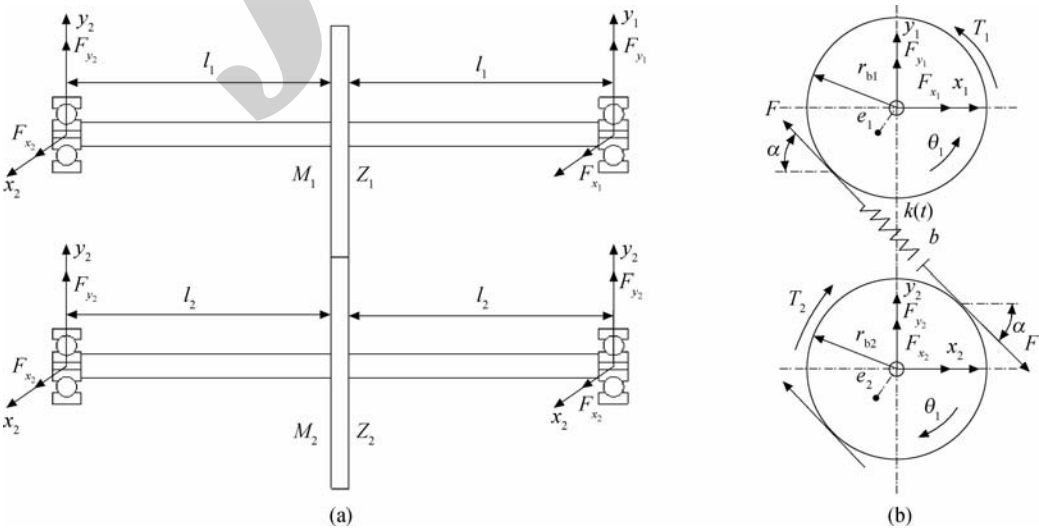


图 1 高重合度齿轮转子-滚动轴承非线性系统的动力学模型
Fig. 1 Dynamical model of high contact ratio gear rotor-rolling bearing nonlinear system

齿数, r_b 为齿轮基圆半径, $k(t)$ 为齿轮副时变啮合刚度, b 为齿侧间隙, T 为扭矩, M 为转子质量, e 为转子质量偏心。

1.1 高重合度齿轮副的时变啮合刚度

齿轮的齿数、变位系数、压力角、齿顶高系数等参数都会影响齿轮重合度的取值, 所以重合度高于 2 的高重合度齿轮副的设计往往需要改变上述参数中的一项或几项来实现的。本文从某组普通重合度齿轮的设计参数出发, 以避免根切、干涉以及齿轮强度达标等方面为约束条件, 优化设计了一组高重合度齿轮副的基本参数(如表 1 所

示), 按照齿轮重合度的计算公式容易验算其重合度可以达到 2.10。

在 $70\text{ N}\cdot\text{m}$ 的扭矩静载下, 通过有限元计算表 1 中两组齿轮副在不同啮合位置处啮合线方向的变形量(其中高重合度齿轮副的变形如图 2 所示), 再把变形量换算为齿轮副的时变啮合刚度如图 3 所示。

利用傅里叶级数对图 3 所示的时变啮合刚度进行拟合, 截取前 6 阶级数后的傅里叶展开式如式(1)、式(2)所示, $k_h(t)$ 表示高重合度齿轮副的啮合刚度(10^7 N/m), $k_l(t)$ 表示普通重合度齿轮副的啮合刚度(10^7 N/m)。

表 1 普通重合度齿轮与高重合度齿轮的基本参数
Table 1 Basic parameters of low contact ratio gear and high contact ratio gear

齿轮	主、从动轮 齿数比	模数/mm	压力角/ (°)	齿宽/mm	主从动轮 变位系数	齿高 系数	重合度
普通重合度	29/31	3	20	25	-0.1/0	1.0	1.68
高重合度	29/31	3	20	25	-0.1/0	1.3	2.10

$$k_h(t) = 38.12 + 2.119\cos(\omega t) - 0.305\sin(\omega t) + 1.894\cos(2\omega t) + 0.829\sin(2\omega t) + 1.354\cos(3\omega t) + 1.282\sin(3\omega t) + 0.883\cos(4\omega t) + 1.345\sin(4\omega t) + 0.407\cos(5\omega t) + 1.177\sin(5\omega t) + 0.125\cos(6\omega t) + 0.834\sin(6\omega t)$$

(1)

$$k_l(t) = 36.54 - 2.897\cos(\omega t) + 5.140\sin(\omega t) + 2.438\cos(2\omega t) + 2.282\sin(2\omega t) + 0.675\cos(3\omega t) - 0.728\sin(3\omega t) - 0.324\cos(4\omega t) + 0.732\sin(4\omega t) + 1.172\cos(5\omega t) + 0.665\sin(5\omega t) + 0.492\cos(6\omega t) - 0.776\sin(6\omega t)$$

(2)

式(1)、式(2)中 t 为时间, 啮合频率 $\omega = Z_1\omega_1$ 或 $\omega = Z_2\omega_2$, ω_1 、 ω_2 分别为主、从动轮转速, Z_1 、 Z_2 分别为主、从齿轮齿数。

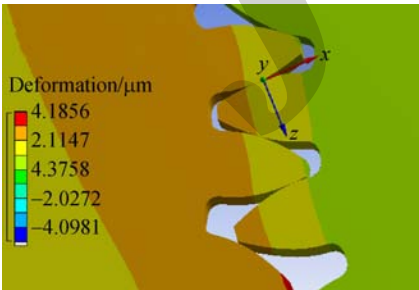


图 2 齿轮副啮合点变形量的有限元计算结果
Fig. 2 Gear pair meshing deformation calculation by finite element method

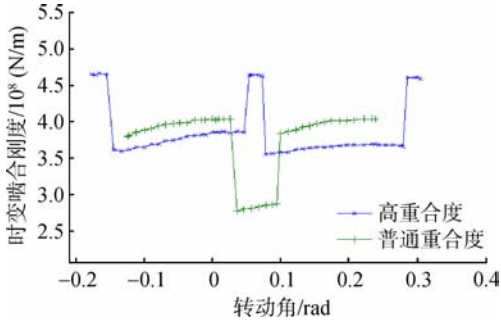


图 3 齿轮副的时变啮合刚度
Fig. 3 Time varying meshing stiffness of gear pair

1.2 齿轮副啮合力与滚动轴承力

齿侧间隙会导致齿轮副啮合力 F 的数学表达是一个关于齿轮副啮合点相对位移 X 的分段函数^[14]

$$F = \begin{cases} k(t)(X - b) & X > b \\ 0 & |X| \leq b \\ k(t)(X + b) & X < -b \end{cases}$$

(3)

由模型中的运动几何关系,齿轮副啮合点的相对位移 X 可以表示为

$$X = r_{b1}\theta_1 - r_{b2}\theta_2 + x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha - x_2\cos\alpha + y_2\sin\alpha \tag{4}$$

根据文献[15]研究结果,滚动轴承游隙以及滚动体接触非线性所导致的非线性力可以表示为

$$\begin{cases} F_{xj} = k_{bj} \sum_{i=1}^{N_j} (x_j\cos\beta_{ji} + y_j\sin\beta_{ji} - r_{0j})^{1.5} H(x_j\cos\beta_{ji} + y_j\sin\beta_{ji} - r_{0j})\cos\beta_{ji} \\ F_{yj} = k_{bj} \sum_{i=1}^{N_j} (x_j\cos\beta_{ji} + y_j\sin\beta_{ji} - r_{0j})^{1.5} H(x_j\cos\beta_{ji} + y_j\sin\beta_{ji} - r_{0j})\sin\beta_{ji} \end{cases} \quad j = 1, 2 \quad i = 1, \dots, N_j \tag{5}$$

式中角标 j 取 1 或 2 分别代表主、从动转子轴承的相应参数,角标 i 代表滚动轴承滚动体序号, β_{ji} 为第 i 个滚动体在 t 时刻所处的位置角,按运动几何关系容易得到其表达式为 $\beta_{ji} = \omega_{0j}t + 2\pi(i-1)/N_j$, ω_{0j} 为相应轴承滚动体的公转角转速,亦即轴承保持架的转动速度,其值为 $\omega_{0j} = r_j\omega_j/(r_j + R_j)$, ω_j 为相应转子转速, R_j 为相应轴承外圈半径, r_j 为相应轴承内圈半径; k_{bj} 为相应滚动轴承的载荷变形系数, r_{0j} 为相应滚动轴承的游隙;以 Heaviside 函数表征 H 轴承游隙所引起的分段非线性,其值根据滚珠与滚道的法向接触变形量 $x_j\cos\beta_{ji} + y_j\sin\beta_{ji} - r_{0j}$ 之正负而取 1 或 0;滚动轴承非线性力的圆频率 ω_{rj} 与滚动体个数 N_j 有关,即 $\omega_{rj} = N_j\omega_{0j}$, N_j 为相应轴承的滚动体个数。

1.3 系统动力学方程

以系统动力学模型的静平衡位置为广义坐标

$$\begin{aligned} \ddot{X} = & (T_1r_{b1} - Fr_{b1}^2)/J_1 - (Fr_{b2}^2 - T_2r_{b2})/J_2 + (F_{x1}/M_1 + e_1\omega_1^2\cos\varphi_1 - F\cos\alpha/M_1)\cos\alpha - \\ & (F_{y1}/M_1 + e_1\omega_1^2\sin\varphi_1 + F\sin\alpha/M_1 - g)\sin\alpha - (F_{x2}/M_2 + e_2\omega_2^2\cos\varphi_2 + F\cos\alpha/M_2)\cos\alpha + \\ & (F_{y2}/M_2 - e_2\omega_2^2\sin\varphi_2 - F\sin\alpha/M_2 - g)\sin\alpha \end{aligned} \tag{7}$$

以主动转子滚动轴承的轴承游隙 r_{01} 为标称长度,引入量纲一位移 $\bar{x}$ 满足 $x = \bar{x}r_{01}$,令当量时间 $\tau = \omega_1 t$,则量纲一速度 $\dot{\bar{x}}$ 及加速度 $\ddot{\bar{x}}$ 可分别表示为 $\dot{x} = \dot{\bar{x}}r_{01}\omega_1$, $\ddot{x} = \ddot{\bar{x}}r_{01}\omega_1^2$ 。把上述量纲参数代

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = F_{x1}[N_1r_1\tau/(r_1 + R_1)]/(M_1r_{01}\omega_1^2) + e_1\cos(\tau + \varphi_{01})/r_{01} - F(\bar{X}, Z_1\tau)\cos\alpha/(M_1r_{01}\omega_1^2) \\ \dot{\bar{y}}_1 = F_{y1}[N_1r_1\tau/(r_1 + R_1)]/(M_1r_{01}\omega_1^2) + e_1\sin(\tau + \varphi_{01})/r_{01} + F(\bar{X}, Z_1\tau)\sin\alpha/(M_1r_{01}\omega_1^2) \\ \dot{\bar{x}}_2 = F_{x2}[N_2r_2\tau/(r_2 + R_2)]/(M_2r_{01}\omega_1^2) + e_2\cos(\tau/I + \varphi_{02})/(I^2r_{01}) + F(\bar{X}, Z_1\tau)\cos\alpha/(M_2r_{01}\omega_1^2) \\ \dot{\bar{y}}_2 = F_{y2}[N_2r_2\tau/(r_2 + R_2)]/(M_2r_{01}\omega_1^2) - e_2\sin(\tau/I + \varphi_{02})/(I^2r_{01}) - F(\bar{X}, Z_1\tau)\sin\alpha/(M_2r_{01}\omega_1^2) \\ \ddot{\bar{X}} = [T_1r_{b1} - F(\bar{X}, Z_1\tau)r_{b1}^2]/(J_1r_{01}\omega_1^2) - [F(\bar{X}, Z_1\tau)r_{b2}^2 - T_2r_{b2}]/(J_2r_{01}\omega_1^2) + \\ \dot{\bar{x}}_1\cos\alpha - \dot{\bar{y}}_1\sin\alpha - \dot{\bar{x}}_2\cos\alpha + \dot{\bar{y}}_2\sin\alpha \end{cases} \tag{8}$$

方程(8)中的齿轮副啮合力 F 是以齿轮副啮合频率 ω 为基频的多频函数,滚动轴承的非线性力 F_{xj} 、 F_{yj} 是按圆频率 ω_{rj} 变化的周期函数,离心

原点,则图 1 所示系统的动力学方程可写为

$$\begin{cases} M_1\ddot{\bar{x}}_1 = F_{x1} + M_1e_1\omega_1^2\cos\varphi_1 - F\cos\alpha \\ M_1\ddot{\bar{y}}_1 = F_{y1} + M_1e_1\omega_1^2\sin\varphi_1 + F\sin\alpha \\ J_1\ddot{\bar{\theta}}_1 = T_1 - Fr_{b1} \\ M_2\ddot{\bar{x}}_2 = F_{x1} + M_2e_2\omega_2^2\cos\varphi_2 + F\cos\alpha \\ M_2\ddot{\bar{y}}_2 = F_{y1} - M_2e_2\omega_2^2\sin\varphi_2 - F\sin\alpha \\ J_2\ddot{\bar{\theta}}_2 = Fr_{b1} - T_2 \end{cases} \tag{6}$$

式中 J_1 、 J_2 分别为主、从动转子的转动惯量,离心惯性力相位角 $\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{01}$, $\varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{02}$, $\omega_2 = \omega_1/I$, I 为齿轮传动比, φ_0 表示相应转子质量偏心的初始相位。

由方程(6)可以导出齿轮副啮合点相对位移 X 的振动微分方程

入方程(6)中的式(1)、式(2)、式(3)、式(4)以及方程(7),可得量纲一相对坐标 $[\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{X}]$ 下的动力学方程。

惯性力是以转子角频率 ω_j 变化的周期函数,所以方程(8)本质上是一个多频激励下的非光滑非线性动力学系统。

2 振动强度稳定性域

振动强度的稳定性并不关注系统的振动呈现为何种轨道形态,而是把研究焦点转向振动的强弱。对于齿轮副而言,啮合力的波动范围能够很好地反映其振动的强弱。因此,本文规定齿轮副啮合力的波动幅值超过某一人为设定的阈值时,即认为系统振动强度失稳,而低于该阈值时则认为振动强度稳定。基于图 1 所示动力学模型,通过数值积分的手段,分别计算表 1 中所列高重合度以及普通重合度齿轮副的动力学响应的时域图,如图 4、图 5 所示。系统中其他基本参数为转子质量偏心 $e_1=e_2=3\mu\text{m}$,齿侧间隙 $b=10\mu\text{m}$,齿轮副时变啮合刚度视仿真对象分别取 $k_b(t)$ 和 $k_l(t)$,主从动转子轴承同型号,即滚动体个数为 9,轴承内圈半径 $r=14.55\text{mm}$,轴承外圈半径 $R=19.98\text{mm}$,滚动轴承的载荷变形系数 $k_b=7.055\times 10^9\text{N/m}^{1.5}$,轴承游隙取 $r_0=10\mu\text{m}$ 。

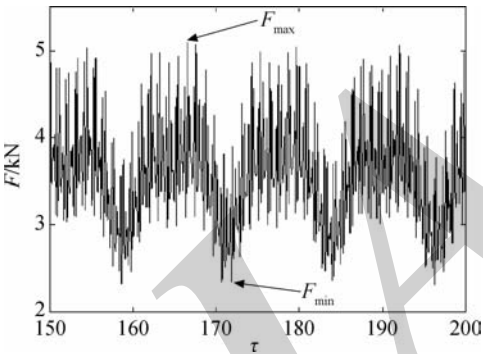


图 4 高重合度齿轮副啮合力波动时域曲线
Fig. 4 Time domain curve of meshing force of high contact ratio gear pair

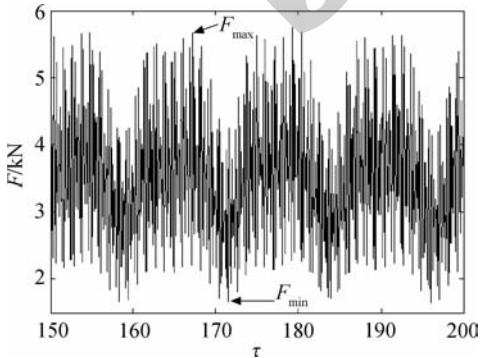


图 5 普通重合度齿轮副啮合力波动时域曲线
Fig. 5 Time domain curve of meshing force of low contact ratio gear pair

啮合力波动幅值 ΔF 定义为齿轮传动系统一段稳态运行过程中啮合力波动的最大值与最小值之差,即 $\Delta F=F_{\max}-F_{\min}$ 。图 4 所示高重合度齿轮副啮合力的波动幅值为 $\Delta F=2780\text{N}$,要明显小于普通重合度齿轮对应值 $\Delta F=4100\text{N}$,显示高重合度齿轮对系统传动稳定性方面具有显著的改善效果。以下以 $\Delta F=2000\text{N}$ 作为振动强度的失稳阈值,分别考查转速、滚动轴承游隙以及转子质量偏心等参数对高重合度齿轮-滚动轴承传动系统振动强度稳定性域的影响规律,并量化高重合度齿轮副对系统传动稳定性的提升程度。

2.1 单参数稳定域

固定转子质量偏心 $e_1=e_2=0\mu\text{m}$,轴承游隙 $r_{01}=r_{02}=20\mu\text{m}$,图 6 是高重合度齿轮-滚动轴承系统的啮合力波动幅值随主动轮转速 n_1 ($n_1=30\omega_1/\pi$) 的变化规律。可以看到,在考查转速范围内存在两段振动强度小于阈值 2000N 的转速区间,分别为 $5\,000\sim 5\,600\text{r/min}$ 和 $6\,300\sim 8\,700\text{r/min}$,也就是振动强度意义上的转速稳定域。在其他设计参数一定的情况下,齿轮转子的工作转速落入到该转速稳定域内,就可以保证齿轮副啮合力的波动幅值小于 2000N 。图 7 是表 1 中普通重合度齿轮副啮合力波动幅值随主动轮转速 n_1 的变化规律,可以看到在考查转速范围内,没有满足振动强度要求的转速稳定域。对比以上两图可知,高重合度能够显著提高齿轮转子-滚动轴承系统的振动强度方面的转速参数稳定域。

固定转速 $n_1=5\,000\text{r/min}$,轴承质量偏心 $e_1=e_2=0\mu\text{m}$,图 8 是高重合度齿轮-滚动轴承系统的啮合力波动幅值随滚动轴承游隙的变化规律。显然,在考查轴承径向游隙范围内存在一段

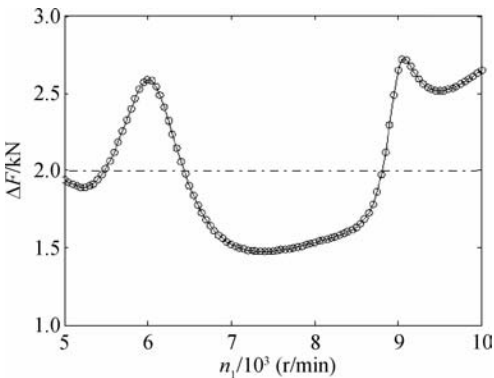


图 6 ΔF 随转速变化规律(高重合度齿轮副)
Fig. 6 Change rule of ΔF with speed (high contact ratio gear pair)

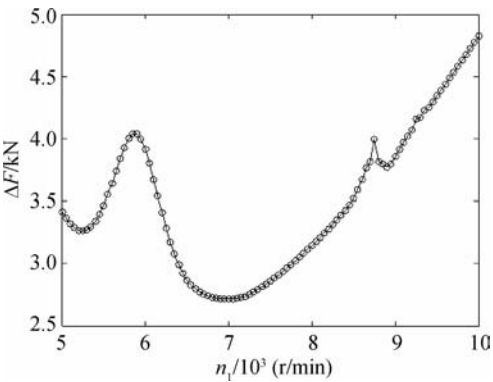


图 7 ΔF 随转速变化规律(普通重合度齿轮副)

Fig. 7 Change rule of ΔF with speed
(low contact ratio gear pair)

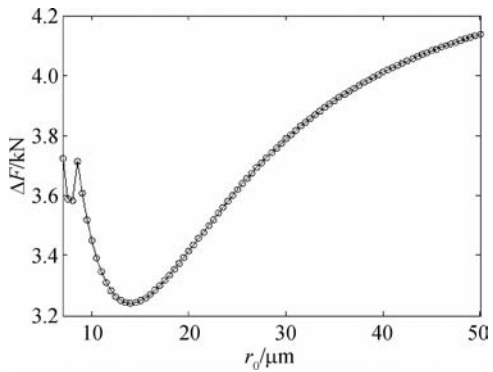


图 9 ΔF 随轴承游隙的变化规律(普通重合度齿轮副)

Fig. 9 Change rule of ΔF with clearance of rolling bearing (low contact ratio gear pair)

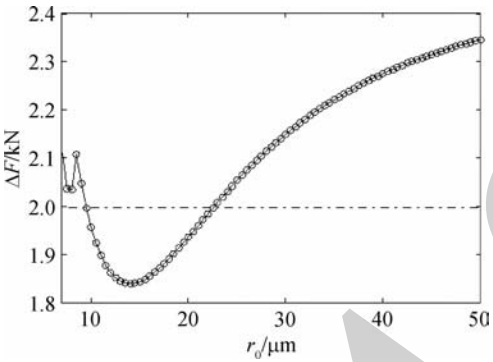


图 8 ΔF 随轴承游隙的变化规律(高重合度齿轮副)

Fig. 8 Change rule of ΔF with clearance of rolling bearing (high contact ratio gear pair)

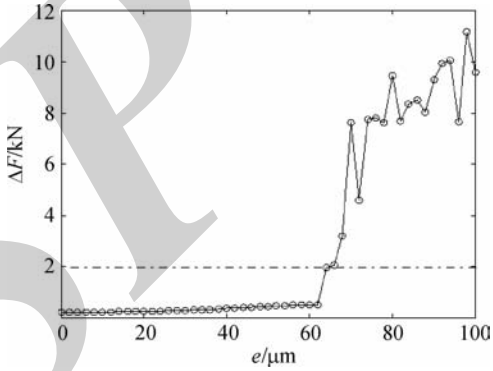


图 10 ΔF 随质量偏心的变化规律(高重合度齿轮副)

Fig. 10 Change rule of ΔF with mass eccentricity of rotor (high contact ratio gear pair)

振动强度小于阈值 2 000 N 的游隙区间(9~23 μm),也就是振动强度意义上的滚动轴承游隙稳定域。图 9 是普通重合度齿轮副啮合力波动幅值随轴承游隙的变化规律,显示在考查游隙范围内,没有满足振动强度要求的稳定域。对比以上两图,高重合度能够显著提高齿轮转子-滚动轴承系统的振动强度方面的轴承游隙参数稳定域。

固定转速 $n_1 = 5\,000\text{ r/min}$,轴承游隙 $r_{01} = r_{02} = 20\text{ }\mu\text{m}$,考查啮合力波动幅值随转子质量偏心的变化规律,分别如图 10 和图 11 所示。为了研究方便,令主、从动转子的质量偏心取同一值,即 $e_1 = e_2 = e$ 。可以看到,在考查偏心范围内,高重合度齿轮对系统振动强度稳定性的提升并不明显。其深层次的物理原因,是由于质量偏心带来的惯性力对齿轮传动振动强度的刺激要远大于齿轮副时变啮合刚度波动引起的振动成分。当两者共存时,较大的质量偏心是引起振动强度失稳的“主犯”,而刚度波动仅仅是振动强度失稳的“帮凶”,单纯依靠提高齿轮副的重合度来降低啮合刚

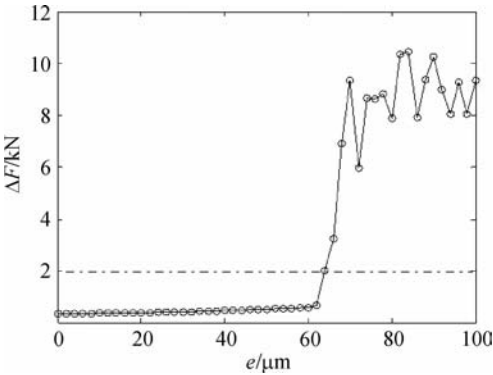


图 11 ΔF 随质量偏心的变化规律
(普通重合度齿轮副)

Fig. 11 Change rule of ΔF with mass eccentricity of rotor (low contact ratio gear pair)

度波动以达到提高传动稳定性的目的,效果不佳。

从图 10、图 11 中还可以发现一个重要规律,齿轮转子-滚动轴承系统存在一个质量偏心阈值,一旦质量偏心量超过该阈值,系统的振动强度将会有个剧烈的提升。本文仿真案例中,这个质

量偏心阈值是 $63\mu\text{m}$,当质量偏心量超过该阈值,系统的啮合力的波动幅值几乎提高了一个数量级,而在该阈值内,增大质量偏心几乎对系统的稳定性无影响。找出该质量偏心阈值对提升齿轮传动系统振动强度的稳定性有着重要意义。

2.2 双参数稳定域

一个齿轮转子-滚动轴承传动系统是一系列具体设计参数的组合,因此计算其不同设计参数组合下的振动强度稳定性域更加具有实际意义。笔者曾经在文献[13]中提出了一种机械系统多参数稳定域的计算方法,按其思想,本文通过不断重复数值积分不同参数组合下动力系统(式(8))至稳态,判断齿轮副啮合力波动幅值是否超过稳定性阈值 $\Delta F=2000\text{ N}$,若未超过,则该组参数组合振动强度稳定,以“ $\circ$ ”标志;若超过阈值,则该组参数组合振动强度失稳,以“ $*$ ”标志。最后“ $\circ$ ”连成的区域即为参数稳定域,“ $*$ ”连成的区域即为参数不稳定域。

图 12 是关于高重合度齿轮转速与轴承游隙的双参数稳定域。可以看到在考查参数范围内,系统的振动强度参数稳定域主要由一块小间隙低转速范围内的三角形区域和一块中等转速区域内的梯形区域构成,统计稳定域在整个考查参数域内占比为 36.5%。图 13 是普通重合度齿轮的相应参数稳定域,明显比高重合度齿轮系统的稳定域小很多,统计其稳定域在整个考查参数域内占比仅为 10.4%。也就是说,在满足同样振动强度要求的设计条件下,高重合度齿轮传动系统的可选轴承间隙-转速参数域是普通齿轮系统的 3.5 倍。

图 14 和图 15 分别是高重合度以及普通重合度齿轮传动系统的转速-质量偏心双参数稳定域,图中能够定性看到高重合度齿轮的参数稳定域要比普通重合度齿轮广阔。图 14 中高重合度齿轮稳定域在整个考查参数域中占比为 26.9%,而图 15 中普通重合度齿轮稳定域在整个考查参数域中占比为 18.6%,也就是说采用高重合度齿轮副可以把系统的转速-质量偏双参数稳定域提升 1.5 倍。

图 16 和图 17 分别是高重合度以及普通重合度齿轮传动系统的轴承游隙-质量偏心双参数稳定域。统计图 16 中高重合度齿轮稳定域在整个考查参数域中占比为 28.3%,而图 17 中普通重合度齿轮稳定域占比为 18.7%,也就是说采用高重合度齿轮副可以把系统的轴承游隙-质量偏心

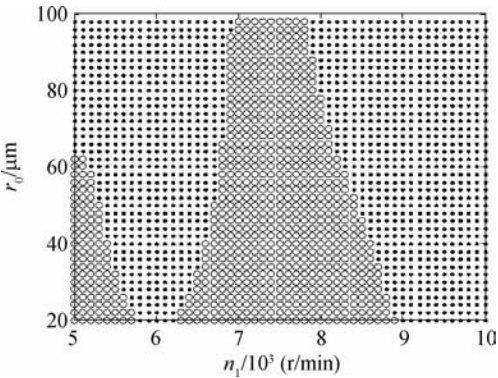


图 12 转速-轴承游隙振动强度稳定域
(高重合度齿轮副)

Fig. 12 Vibration intensity stability domain about speed and clearance of rolling bearing
(high contact ratio gear pair)

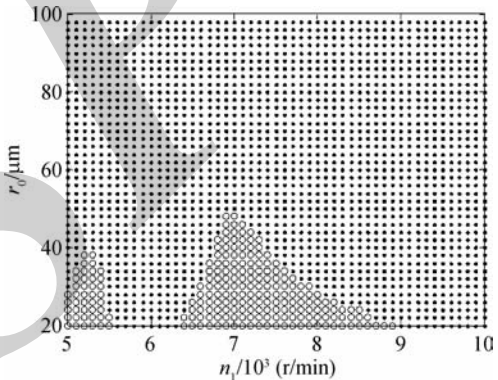


图 13 转速-轴承游隙振动强度稳定域
(普通重合度齿轮副)

Fig. 13 Vibration intensity stability domain about speed and clearance of rolling bearing
(low contact ratio gear pair)

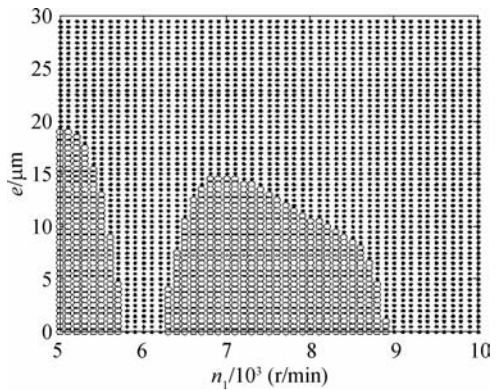


图 14 转速-转子质量偏心振动强度稳定域
(高重合度齿轮副)

Fig. 14 Vibration intensity stability domain about speed and mass eccentricity of rotor
(high contact ratio gear pair)

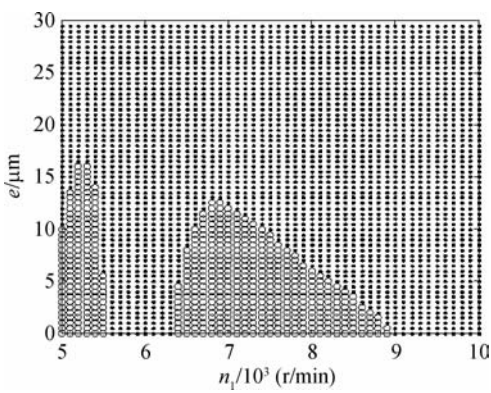


图 15 转速-转子质量偏心振动强度稳定域
(普通重合度齿轮副)

Fig. 15 Vibration intensity stability domain about speed and mass eccentricity of rotor (low contact ratio gear pair)

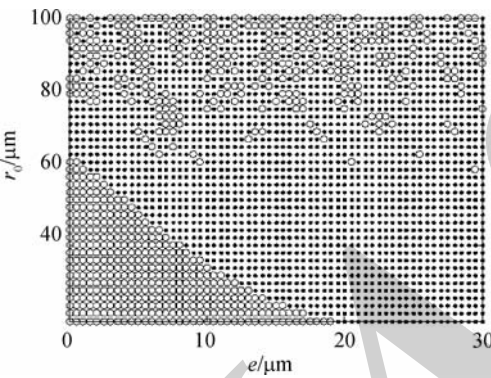


图 16 轴承游隙-转子质量偏心振动强度稳定域
(高重合度齿轮副)

Fig. 16 Vibration intensity stability domain about clearance of rolling bearing and mass eccentricity of rotor (high contact ratio gear pair)

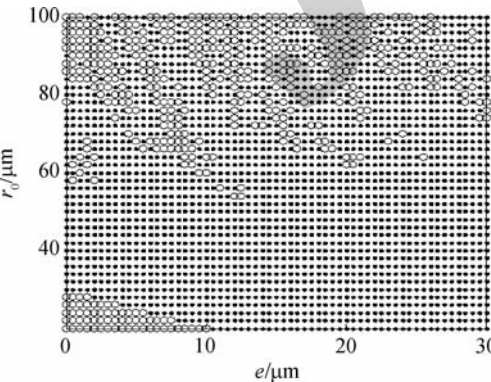


图 17 轴承游隙-转子质量偏心振动强度稳定域
(普通重合度齿轮副)

Fig. 17 Vibration intensity stability domain about clearance of rolling bearing and mass eccentricity of rotor (low contact ratio gear pair)

双参数稳定域提升 1.5 倍。

需要说明的是,图 16 和图 17 所示的稳定域中,大间隙范围内稳定的轴承游隙-质量偏心参数组合点是与不稳定的参数组合点散乱在一起的,没有形成连续的稳定域——也就是说,只要轴承游隙或质量偏心与设计值稍有出入就有可能导致系统振动强度的失稳。所以,大间隙处稳定的轴承游隙-质量偏心参数组合没有工程实用价值。

3 振动轨道的稳定性域

3.1 振动轨道稳定性随轴承游隙的变化规律

图 18 是高重合度齿轮转子-轴承系统振动轨道稳定性随转子轴承游隙的分岔规律(令 $r_0 = r_{01} = r_{02}$)。为了凸显轴承游隙的影响,齿轮副的啮合刚度取平均啮合刚度,从而可以排除齿轮副时变啮合刚度齿频激励力的影响;令转子质量偏心 $e_1 = e_2 = 0 \mu\text{m}$,从而可以排除质量偏心造成的转子转动圆频率离心力的影响。这样动力系统式(8)中的激振力只剩下按照滚动轴承 $N_j (j=1,2)$ 倍滚动体公转频率变化的非线性轴承力。

取 Poincare 截面为 $\Sigma = \{(\tau, X) \in D \times D^n | \tau = \text{mod}[2\pi/(N_1\omega_{01})], x_i = \max(x_{i0} \rightarrow x_{iT})\}$ ($x_i = \max(x_{i0} \rightarrow x_{iT})$ 表示系统第 i 个状态变量在一个 $1/N_j (j=1,2)$ 倍滚动体公转周期中的最大值),计算不同轴承游隙下的 Poincare 图即可拼成系统振动轨道稳定性随轴承游隙的全局分岔图 18,图 19 是局部分岔图。

分岔图 18 与图 19 非常清晰地反映了高重合度齿轮转子-轴承系统振动轨道稳定性随转子轴承游隙的分岔规律:随着轴承游隙的增大,周期一轨道通过不断倍周期分岔(图 20~图 22 分别显

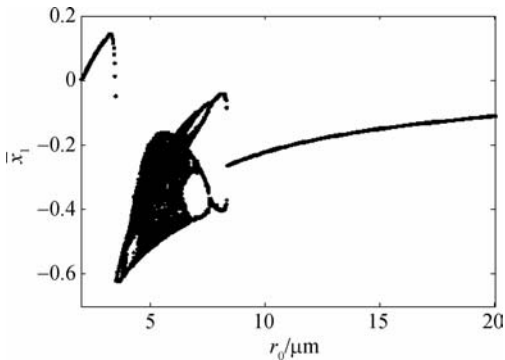


图 18 振动轨道稳定性随轴承游隙的全局分岔图

Fig. 18 Global bifurcation diagram about movement orbit stability with clearance of rolling bearing

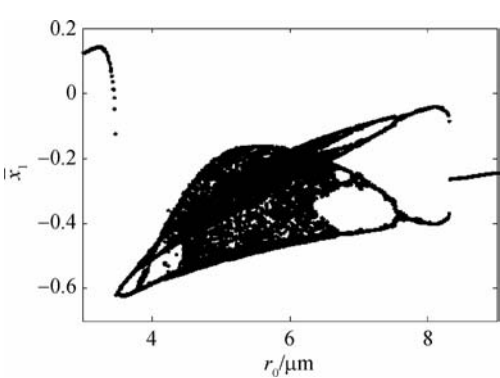


图 19 振动轨道稳定性随轴承游隙的局部分岔图
Fig. 19 Local bifurcation diagram about movement orbit stability with clearance of rolling bearing

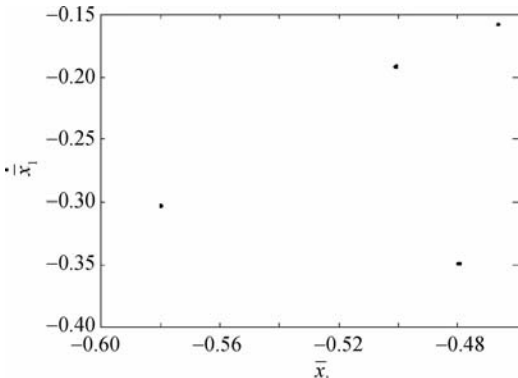


图 22 系统的 Poincare 截面图($r_0=4.05\mu\text{m}$)
Fig. 22 Poincare map of system ($r_0=4.05\mu\text{m}$)

示了周期一运动、周期二运动以及周期四运动的吸引子形态)的途径进入到了混沌运动(如图 23 所示),然后混沌运动通过不断地倍周期倒分岔再次回归周期一运动。

各种振动轨道的具体稳定区间为:2.0~3.5 μm 游隙区间为周期一运动,3.5~3.8 μm 游隙区

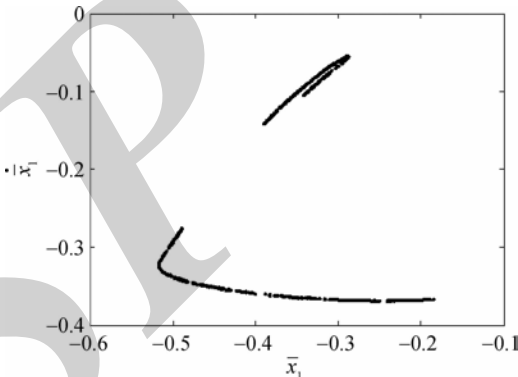


图 23 系统的 Poincare 截面图($r_0=5.0\mu\text{m}$)
Fig. 23 Poincare map of system ($r_0=5.0\mu\text{m}$)

间为周期二运动,3.8~4.2 μm 游隙区间为周期四运动,4.5~6.7 μm 游隙区间为混沌运动,4.9~7.5 μm 游隙区间为为周期四运动,7.5~8.3 μm 游隙区间为周期二运动,8.3~20 μm 区间为周期一运动。

3.2 振动轨道稳定性随转子质量偏心的变化规律

图 24 是高重合度齿轮转子-轴承系统振动轨道稳定性随转子质量偏心 e 的分岔规律。为了凸显质量偏心的影响,齿轮副的啮合刚度取平均啮合刚度,从而可以排除齿轮副时变啮合刚度齿频激励力的影响;滚动轴承假设为线性弹簧,从而可以排除滚动轴承 N_j ($j=1,2$) 倍滚动体公转频率激励力的影响。这样动力系统(式(8))中的激振力只剩质量偏心造成的按照转子转动圆频率简谐变化的离心力。取 Poincaré 截面为 $\Sigma = \{(\tau, X) \in D \times D^n | \tau = \text{mod}(2\pi/\omega_1), x_i = \max(x_{i0} \rightarrow x_{iT})\}$ ($x_i = \max(x_{i0} \rightarrow x_{iT})$) 表示系统第 i 个状态变量在一个转子转动周期中的最大值),计算不同质量偏心下的 Poincaré 图即可拼成系统振动轨道稳定性随质量偏心的全局分岔图 24。

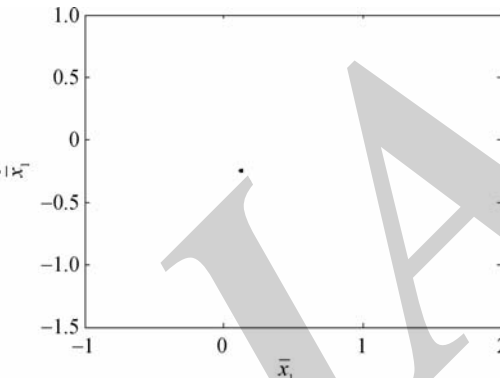


图 20 系统的 Poincare 截面图($r_0=3.0\mu\text{m}$)
Fig. 20 Poincare map of system ($r_0=3.0\mu\text{m}$)

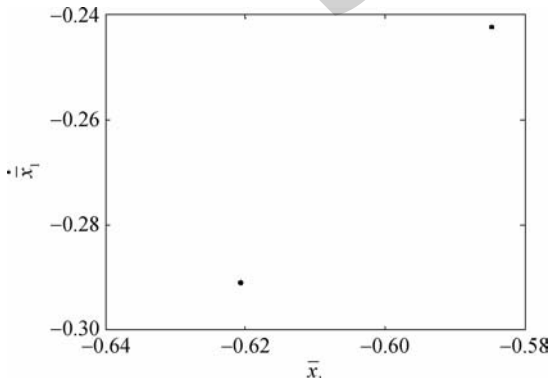


图 21 系统的 Poincare 截面图($r_0=3.59\mu\text{m}$)
Fig. 21 Poincare map of system ($r_0=3.59\mu\text{m}$)

图 24 非常清晰地显示了高重合度齿轮传动系统振动轨道稳定性随转子质量偏心的分岔规律,即在偏心区间 $0\sim 42\mu\text{m}$ 之间,系统振动呈现为稳定的周期一运动形态;在偏心区间 $42\sim 50\mu\text{m}$ 之间,系统振动呈现为稳定的混沌运动。图 25 显示了 $e=50\mu\text{m}$ 时系统混沌吸引子的形态。在质量偏心量 $e=42\mu\text{m}$ 附近,系统的振动轨道由周期一运动直接分岔为混沌,表现出了典型的“激变”途径。由于“激变”进入混沌多发于非光滑非线性动力系统^[16-18],所以高重合度齿轮传动系统中的齿侧间隙以及轴承间隙的存在可能是导致“激变”的根源。

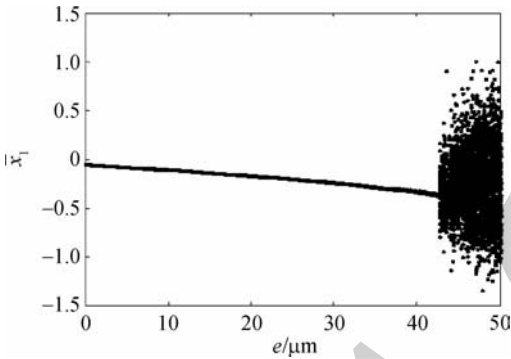


图 24 振动轨道稳定性随质量偏心的全局分岔图
Fig. 24 Global bifurcation diagram about movement orbit stability with mass eccentricity of rotor

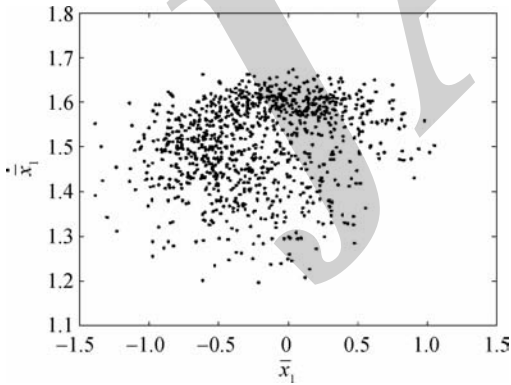


图 25 系统的 Poincare 截面图($e=50\mu\text{m}$)
Fig. 25 Poincare map of system ($e=50\mu\text{m}$)

4 结 论

1) 本文建立了高重合度齿轮转子-滚动轴承系统的非线性动力学模型,模型中充分考虑了滚动轴承游隙以及齿轮副齿侧间隙等非线性因素,通过数值仿真的手段初步研究了高重合齿轮传动系统的振动强度稳定性以及振动轨道稳定性随系

统参数的变化规律。

2) 通过振动强度参数稳定域的计算完成了高重合度齿轮副对齿轮转子轴承系统稳定性提升贡献的量化。数值结果表明,在转子质量偏心较小的条件下,高重合度齿轮系统满足振动强度要求的可选参数稳定域要比普通重合度齿轮系统提高很多;但在转子质量偏心较大时,高重合度齿轮副的采用对传动系统参数稳定域的扩张并没有太大贡献。

3) 通过振动轨道稳定性全局分岔图的计算,明确了滚动轴承间隙、转子质量偏心等系统参数对高重合度系统振动轨道稳定性的影响规律,获得了各种稳定的周期轨道与对应参数区间的映射关系。随着轴承游隙值由小变大,系统的振动轨道会由周期一轨道(滚动轴承力周期)按倍周期分岔的途径进入到混沌,然后再由混沌再次回归周期振动轨道;随着转子质量偏心值由小变大,系统的振动轨道会由周期一轨道(转子转动周期)在某一个阈值点“激变”为混沌,并在较大的质量偏心区间始终保持为混沌。

参考文献:

[1] HIS H,WANG J F,OSWALD F B,et al. Effect of extended tooth contact on the modeling of spur gear transmissions[R]. NASA ARL-CR-159,1993.

[2] CORNELL R W, WESTERVELT W W. Dynamic tooth loads and stressing for high contact ratio spur gears[J]. Journal of Tribology,1978,100(1):69-76.

[3] THIRUMURUGAN R,MUTHUVEERAPPAN G. Critical loading points for maximum fillet and contact stresses in normal and high contact ratio spur gears based on load sharing ratio[J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines,2011,39(1):118-141.

[4] 邓效忠,方宗德,张良金,等. 弧齿锥齿轮的高重合度设计[J]. 中国机械工程,2002,13(9):791-795.

DENG Xiaozhong,FANG Zongde,ZHANG Liangjin,et al. Design of spiral bevel gears with high contact ratio[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,2002,13(9):791-795. (in Chinese)

[5] 邓效忠,方宗德,杨宏斌,等. 高重合度弧齿锥齿轮的强度分析[J]. 航空动力学报,2002,17(3):367-372.

DENG Xiaozhong,FANG Zongde,YANG Hongbin,et al. Strength analysis of spiral bevel gears with high contact ratio[J]. Journal of Aerospace Power,2002,17(3):367-372. (in Chinese)

[6] 邓效忠,方宗德,魏冰阳,等. 高重合度弧齿锥齿轮的性能分析与实验研究[J]. 航空动力学报,2003,18(6):744-748.

DENG Xiaozhong,FANG Zongde,WEI Bingyang,et al. A-

analysis of meshing behavior and experiments of spiral bevel gears with high contact ratio[J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(6): 744-748. (in Chinese)

[7] 李发家, 朱如鹏, 靳广虎, 等. 多间隙高重合度齿轮传动系统动力学分岔与稳定性分析[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2015, 43(6): 63-70.

LI Fajia, ZHU Rupeng, JIN Guanghu, et al. Analysis of dynamic bifurcation and stability of gear system with multiple clearances and high contact ratio[J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2015, 43(6): 63-70. (in Chinese)

[8] 李发家, 朱如鹏, 鲍和云, 等. 高重合度与低重合度齿轮系统动力学分岔特性对比分析[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2015, 46(2): 465-471.

LI Fajia, ZHU Rupeng, BAO Heyun, et al. Contrastive analysis of dynamic bifurcation characteristics between high contact ratio and low contact ratio gears system[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2015, 46(2): 465-471. (in Chinese)

[9] 渠珍珍, 鲍和云, 朱如鹏, 等. 高重合度行星齿轮传动系统动态特性分析[J]. 机械科学与技术, 2012, 31(7): 1174-1179.

QU Zhenzhen, BAO Heyun, ZHU Rupeng, et al. Dynamic characteristics analysis of high contact ratio planetary gear transmission[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2012, 31(7): 1174-1179. (in Chinese)

[10] 赵宁, 秋朋园, 刘贵立. 高重合度人字齿轮传动动态性能优化设计[J]. 国防科技大学学报, 2015, 37(2): 166-174.

ZHAO Ning, QIU Pengyuan, LIU Guili. Optimized design of dynamic behavior of double helical gears with high contact ratio[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2015, 37(2): 166-174. (in Chinese)

[11] WANG Jiande, HOWARD I. Finite element analysis of high contact ratio spur gears in mesh[J]. Journal of Tribology, 2005, 127: 469-483.

[12] LI Shuting. Effect of addendum on contact strength, bending strength and basic performance parameters of a pair of spur gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(12): 1557-1584.

[13] 李同杰, 朱如鹏, 鲍和云, 等. 行星齿轮非线性振动系统参数稳定域的计算方法[J]. 航空动力学报, 2012, 27(6): 1416-1423.

LI Tongjie, ZHU Rupeng, BAO Heyun, et al. Method of stability region determination for planetary gear train's parameters based on nonlinear vibration model[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(6): 1416-1423. (in Chinese)

[14] 李同杰, 朱如鹏, 鲍和云, 等. 行星齿轮系扭转非线性振动建模与运动分岔特性研究[J]. 机械工程学报, 2011, 47(21): 76-83.

LI Tongjie, ZHU Rupeng, BAO Heyun, et al. Nonlinear torsional vibration modeling and bifurcation characteristic study of a planetary gear train[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(21): 76-83. (in Chinese)

[15] TIWQRI M, GUPTA K. Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 238(5): 723-756.

[16] 胡海岩. 应用非线性动力学[M]. 北京: 航空工业出版社, 2000.

[17] ZHANG Y, SHARF I. Validation of nonlinear contact force models for low speed impact[J]. Journal of Applied Mechanics, 2009, 76(5): 2-12.

[18] MOULAY E, BOURDAIS R, PERRUQUETTI W. Stabilization of nonlinear switched systems using control Lyapunov functions[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2007, 1(4): 482-490.

(编辑: 陈 越)